26/10/17

Δεσμευμένη Πιθανότητα

Ζάρι μια φορά

$S = \{1, 2, 3, \underbrace{4, 5, 6}_{B}\}$

$A = \{\text{αποτέλεσμα ρίψης άρτιος}\} = \{2, \underbrace{4, 6}_{A \cap B}\}$

$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

Παίρνω μια μερική πληροφορία → Αποτελ. ≥ 4

↓

$B = \{\text{Αποτελ} \geq 4\} = \{4, 5, 6\}$

Είναι η P(A) ίδια ή άλλαξε;

Πόσο έγινε;

Νέα πιθανότητα του A ← $\frac{2}{3}$

Δεσμευμένη Πιθανότητα } $P(A \setminus B) = \frac{2}{3} = \frac{|A \cap B|}{\|B\|} = \frac{\|A \cap B\| / \|S\|}{\|B\| / \|S\|} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

Ορισμός: Έστω $(S, \mathcal{A}, P)$ χώρος πιθανότητας και (έστω $A, B \in \mathcal{A}$ με $P(B) > 0$)

Η δεσμευμένη πιθανότητα του A δοθέντος ότι το B έχει πραγμα-τοποιηθεί συμβολίζεται με $P(A \setminus B)$ και ορίζεται

$$P(A \setminus B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Πρόταση: Έστω $(S, \mathcal{A}, P)$ χώρος πιθανότητας. Έστω ότι για δοθέν $B \in \mathcal{A}$ με $P(B) > 0$ η πραγματική συνάρτηση $P(\cdot / B) : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ με τύπο $P(A/B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$

Να δειχθεί ότι $P(\cdot \setminus B)$ είναι μέτρο πιθανότητας (ικανοποιεί αξιώματα Kolmogorov)

(A1) $P(A \setminus B) \geq 0 \quad \forall A \in \mathcal{A}$

(A2) $P(S \setminus B) = 1 \qquad \left(\dfrac{P(S \cap B)}{P(B)} = \dfrac{P(B)}{P(B)} = 1 \right)$

(A3) Έστω $A_i \in \mathcal{A}$ $i = 1, 2, \ldots$ με με $A_i \cap A_j = \emptyset$, $i \neq j$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \setminus B\right) \overset{\text{ορ.}}{=} \frac{P\left(\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \cap B\right)}{P(B)} = \frac{P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} (A_i \cap B)\right)}{P(B)}$$

$\dfrac{A_i \text{ ασυμβ.}}{A_i \cap B \text{ ασυμβ.}}$ $\quad \dfrac{\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i \cap B)}{P(B)} = \sum_{i=1}^{\infty} \dfrac{P(A_i \cap B)}{P(B)} = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i \setminus B)$

Παρατήρηση: Η $P(\cdot \setminus B)$ ικανοποιεί όλες τις ιδιότητες

π.χ. $P(A^c \setminus B) = 1 - P(A \setminus B)$

$P(A \cup B \setminus \Gamma) = P(A \setminus \Gamma) + P(B \setminus \Gamma) - P(A \cap B \setminus \Gamma)$ κοκ

Παράδειγμα: Ένα ζάρι ρίχνεται δυο φορές

$A = \{$Η απόλυτη τιμή της διαφοράς είναι ίση με $4\} = \{(x,y) : |x-y| = 4,\ x, y = 1, 2, \ldots 6\}$

$B = \{$Άθροισμα αποτελ. ίσο με $8\}$ ⊛⊛ $= \{x + y = 8\}$

$P(A|B) = ;$

$(*) : \{(6,2), (5,1), (1,5), (2,6)\}$

$(**) = \{(6,2), (2,6), (5,3), (3,5), (4,4)\}$

$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{2/36}{5/36} = \frac{2}{5}$$

Παράδειγμα: $52 \to 5$

α) P(να $\underbrace{\text{επιλεγούν ακριβώς 2 άσσοι}}_{A}$, αν είναι γνωστό ότι έχουν $\underbrace{\text{επιλεγεί ακριβώς 2 ρηγάδες}}_{B}$)

$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{\dfrac{\binom{4}{2}\times\binom{4}{2}\times\binom{44}{1}}{\binom{52}{5}}}{\dfrac{\binom{4}{2}\times\binom{48}{3}}{\binom{52}{5}}} = 0{,}0153$$

$52 \to 5$ P(να $\underbrace{\text{επιλεγούν 2 άσσοι}}_{A}$, δεδομένου ότι $\underbrace{\text{έχει επιλεγεί τουλάχιστον ένας άσσος}}_{\Gamma}$)

$$P(A|\Gamma) = \frac{P(A\cap\Gamma)}{P(\Gamma)} = \frac{\dfrac{\binom{4}{2}\times\binom{48}{3}}{\binom{52}{5}}}{1-\dfrac{\binom{48}{5}}{\binom{52}{5}}} = 0{,}1170$$

$1 - P(\Gamma^c)$

<u>Παρατήρηση:</u> $P(A) = 0,0399$

$P(A) > P(A \backslash B)$

$P(A) < P(A \backslash \Gamma)$

<u>Πρόταση:</u> Έστω $(S, \mathcal{A}, P)$ χώρος πιθανοτήτων

α) Πολλική Αρχή Πιθανοτήτων

Αν $A_i \in \mathcal{A}$, $i = 1, 2, \dots n$ με $P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}) > 0$, $n \geq 2$

τότε $P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1)\, P(A_2 / A_1)\, P(A_3 / A_1 \cap A_2) \dots P(A_n / A_1 \cap \dots)$

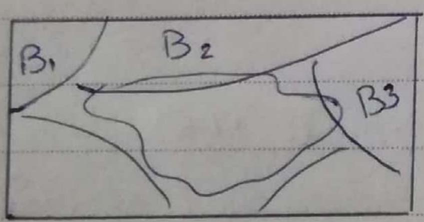
$$= P(A_1) \frac{P(A_2 \cap A_1)}{P(A_1)} \cdot \frac{P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)}{P(A_1 \cap A_2)} \dots \frac{P(A_n \cap A_1 \cap \dots A_{n-1})}{P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n)}$$

β) <u>Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας</u> (Θ.Ο.Π.)

Έστω $\{B_1, \dots B_n\}$ διαμέριση του S $(B_i \subseteq S,\ B_i \cap B_j = \emptyset,\ i \neq j,\ \bigcup_{i=1}^{n} B_i = S)$

και $A \in \mathcal{A}$

Τότε $P(A) = \sum_{i=1}^{n} (P(A) \backslash B_i)\, P(B_i)$



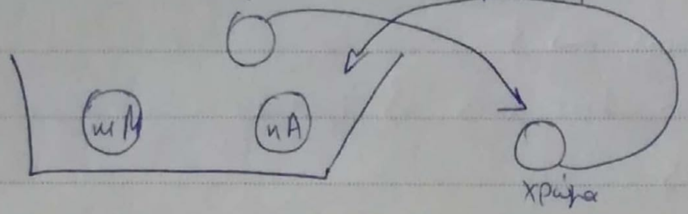
<u>Απόδειξη:</u> $A = A \cap S = A \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} B_i\right) = \bigcup_{i=1}^{n} (A \cap B_i)$

$$P(A) = P\left(\bigcup_{i=1}^{n} (A \cap B_i)\right) \xrightarrow[A \cap B_i \text{ ξένα ή ασυμβ.}]{B_i \text{ ξένα}} \sum_{i=1}^{n} P(A \cap B_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A \backslash B_i) \cdot P(B_i)$$

Μια κάλπη περιέχει m μαύρες και n άσπρες σφαίρες

κ ίδιου χρώματος

επανατοποθετούμε



a) P(η 2η σφαίρα να είναι άσπρη)

b) P(οι δύο σφαίρες να είναι άσπρες)

$A = \{$η 2η σφαίρα άσπρη$\}$

$B_1 = \{$η 1η σφαίρα άσπρη$\}$

$B_2 = \{$η 1η σφαίρα μαύρη$\}$

a) $P(A) = \sum_{i=1}^{2} P(A \mid B_i)\, P(B_i) = P(A \mid B_1) P(B_1) + P(A \mid B_2) P(B_2)$

$$= \frac{n+k}{n+m+k} \cdot \frac{n}{n+m} + \frac{n}{n+m+k} \cdot \frac{m}{m+n}$$

$$\frac{\binom{n+k}{1}}{\binom{n+m+k}{1}}$$

b) $P(A \cap B_1) = P(A \mid B_1) P(B_1) = \dfrac{n+k}{n+m+k} \cdot \dfrac{n}{n+m}$

Παράδειγμα: Διαλέγω 3 από τις 100

100 ~~ερωτήσεις~~ ερωτήσεις → 3

Περνάει → αν απαντήσει και στις 3 σωστά

Γνωρίζει → 90 ερωτήσεις

$$P(\text{περάσει στις εξετάσεις}) = P\left(\begin{array}{c}\text{και οι 3 ερωτήσεις} \\ \text{να είναι από αυτές} \\ \text{που γνωρίζει}\end{array}\right) = P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \circledast$$

$$A_i = \left\{\begin{array}{l}i\text{-ερώτηση συμπεριλαμβ.} \\ \text{σ' αυτές που γνωρίζει}\end{array}\right\}$$

$$\circledast = P(A_1)\, P(A_2 \mid A_1)\, P(A_3 \mid A_1 \cap A_2)$$

πολλαπλ. κανόνας

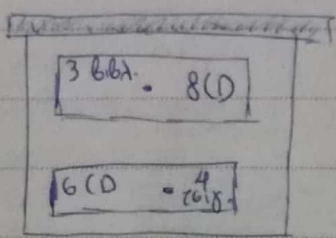
$$= \frac{90}{100} \times \frac{89}{99} \times \frac{88}{98} = \frac{\binom{90}{3}}{\binom{100}{3}}$$

Παράδειγμα: Κομοδίνο αποτελείται από 2 συρτάρια

- 1ο → 3 βιβλία, → 8 CD
- 2ο → 8 CD, → 4 πακέτα τσιγάρα

a) P(βιβλίο)

b) P(CD)



$B_1 = \{1^{\text{ο}}\ \text{συρτάρι}\}$, $B_2 = \{2^{\text{ο}}\ \text{συρτάρι}\}$

$A = \{ \text{βιβλίο} \}$ $\Gamma = \{ CD \}$

α) $P(A) = P(A \mid B_1) P(B_1) + P(A \mid B_2) P(B_2)$

$$= \frac{3}{11} \times \frac{1}{2} + 0 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{22}$$

β) $P(\Gamma) = P(\Gamma \mid B_1) P(B_1) + P(\Gamma / B_2) P(B_2)$

$$\frac{8}{11} \times \frac{1}{2} + \frac{6}{10} \times \frac{1}{2} = \frac{8}{22} + \frac{6}{20}$$

(Πρόβλημα των κλειδιών)

n-κλειδιά → 1 ανοίγει 1 πόρτα

$P\left(\begin{array}{l} \text{το σωστό κλειδί να χρησιμοποιείται} \\ \text{στην } k\text{-δοκιμή} \\ k = 1, \ldots n \end{array} \right)$ ⊛

$A_i = \left\{ \begin{array}{l} \text{το σωστό κλειδί επιλέγεται} \\ \text{στην } i\text{-φορά (δοκιμή)} \end{array} \right.$

⊛ $= P(A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c \cap \ldots \cap A_{k-1}^c \cap A_k)$

$= P(A_1^c) P(A_2^c \mid A_1^c) P(A_3^c \mid A_2^c \cap A_1^c) \ldots P(A_k / A_1^c \cap A_2^c \cap \ldots A_{k-1}^c)$

$$= \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n-1} \; \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{1}{n-(k-1)}$$